9 Paskaita. Atsitiktinių dydžių dispersija

Vienoje gatvės pusėje gyvena dešimt žmonių, jų vidutinis mėnesinis uždarbis – 1 tūkstantis eurų. Kitoje – taip pat dešimt žmonių, o jų mėnesinio uždarbio vidurkis tas pats. Atrodo, visiškai vienoda padėtis abiejose gatvės pusėse. Tačiau yra dar viena aplinkybė – vienoje gatvės pusėje visi gyventojai uždirba po 1 tūkstantį, o kitoje – vienas uždirba 10000, o kiti devyni iš viso neturi darbo! Taigi vienos atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos – vidurkio dažniausiai nepakanka dydžio savybėms apibūdinti. Kurio dydžio reikšmės mažiausiai, kurio daugiausiai išsibarstę apie vidurkį? Reikalingas reikšmių išsibarstymo matas. Kyla natūrali mintis – surasti reikšmių nuokrypių (atstumų) nuo vidutinės reikšmės vidurkį. Atstumas yra reikšmės ir vidurkio skirtumo modulis. Modulis nėra labai patogi funkcija, todėl vietoje naudojamas skirtumo kvadratas.

Apibrėžimas. *Tegu ξ – atsitiktinis dydis, $k \geq 0$. Jeigu vidurkiai $\mathbf{E}\xi^k, \mathbf{E}|\xi|^k$ egzistuoja, tai juos vadinsime atsitiktinio dydžio ξ k-ju ir k-ju absoliučiuoju momentais.*
Diskrečiojo atsitiktinio dydžio k-asis momentas reiškiamas eilute

$$\mathbf{E}\xi^k = \sum_x x^k P(\xi = x),$$

o absoliučiai tolydžiojo

$$\mathbf{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x) dx.$$

Iš nelygybės

$$|\xi|^r \leq 1 + |\xi|^k, 0 \leq r \leq k,$$

ir vidurkio savybių išplaukia, jog iš $\mathbf{E}|\xi|^k$ egzistavimo seka ir $\mathbf{E}|\xi|^r$ egzistavimas. Jei egzistuoja $\mathbf{E}|\xi|^k$, tai su bet kokiu skaičiumi a egzistuoja vidurkis $\mathbf{E}|\xi - a|^k$. Iš tikrųjų, šis teiginys išplaukia iš nelygybės $|\xi - a|^k \leq (|\xi| + |a|)^k$. Atskliaudę skliaustus dešinėje nelygybės pusėje, gausime sumą, kurios dėmėnys – dydžių $|\xi|^r, r \leq k$ tiesinis darinys. Kadangi visų sių dydžių vidurkiai egzistuoja, egzistuoja ir $\mathbf{E}(|\xi| + |a|)^k$, tuo pačiu ir $\mathbf{E}|\xi - a|^k$.

Apibrėžimas. *Tegu atsitiktinio dydžio ξ k-asis absoliutusis momentas $\mathbf{E}|\xi|^k$ egzistuoja $(k \geq 1)$. Skaičius $\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^k$ ir $\mathbf{E}|\xi - \mathbf{E}\xi|^k$ vadinsime atitinkamai k-ju centriniu ir k-ju centriniu absoliučiuoju momentais. Antrąjį centrinį momentą vadinsime dispersija. Dispersiją žymėsime*

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2.$$

Dispersija yra atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo matas. Įrodysime keletą dispersijos savybių.

Teorema. *Tegu ξ, ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, turintys antruosius momentus. Teisingi tokie teiginiai:*

1. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$;

2. $\mathbf{D}\xi = \inf_a \mathbf{E}|\xi - a|^2$*;*

3. $\mathbf{D}c\xi = c^2\mathbf{D}\xi$*;*

4. jei ξ_1, ξ_2 *yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai*

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2;$$

5. $\mathbf{D}\xi = 0$ *tada ir tik tada, kai* $P(\xi = \mathbf{E}\xi) = 1$*.*

Įrodymas.

1. paėmę abiejų lygybės $(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = \xi^2 - 2\xi \cdot \mathbf{E}\xi + (\mathbf{E}\xi)^2$ pusių vidurkius, ir turėdami omeny $\mathbf{E}\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\xi$ gausime

$$\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - 2\mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\xi + \mathbf{E}(\mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2;$$

2. lygybėje

$$(\xi - a)^2 = (\xi - \mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\xi - a)^2 = (\xi - \mathbf{E}\xi)^2 + 2(\xi - \mathbf{E}\xi)(\mathbf{E}\xi - a) + (\mathbf{E}\xi - a)^2$$

pereikime prie vidurkių. Gausime

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi - a)^2 &= \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 + 2\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\mathbf{E}\xi - a) + (\mathbf{E}\xi - a)^2 \\ &= \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 + (\mathbf{E}\xi - a)^2.\end{aligned}$$

Suprantama, kad dydžio $\mathbf{E}(\xi - a)^2$ reikšmė mažiausia, kai $a = \mathbf{E}\xi$, nes tuomet antrasis dėmuo lygus 0. Tačiau ši mažiausioji reikšmė ir yra dispersija.

3. $\mathbf{D}c\xi = \mathbf{E}(c\xi - \mathbf{E}c\xi)^2 = c^2\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = c^2\mathbf{D}\xi$.

4. kadangi $\mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1 + \mathbf{E}\xi_2$, o

$$\mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2)^2 = \mathbf{E}\xi_1^2 + 2\mathbf{E}\xi_1\xi_2 + \mathbf{E}\xi_2^2,$$

tai įstatę šias lygybes į 1 dalyje įrodytą formulę ir sutvarkę išraiškas, gausime norimą lygybę.

5. Įrodysime būtinumą, nes pakankamumas yra akivaizdus.

Tegu $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = 0$. Jeigu būtų $P(\xi = \mathbf{E}\xi) < 1$, tai egzistuotų $\delta > 0$, kad $P(|\xi - \mathbf{E}\xi| > \delta) > 0$. Imkime $A = \{w : |\xi(w) - \mathbf{E}\xi| > \delta\}$ ir pažymėkime $\eta = I_A$. Tada $\mathbf{E}\eta^2 > 0$ ir $|\xi - \mathbf{E}\xi| > \delta\eta$. Todėl turėtų būti

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 > \delta^2\mathbf{E}\eta^2 > 0.$$

Gavome prieštaravimą. Teiginys įrodytas.

Išvada. Jei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai jų suma taip pat turi dispersiją ir

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n.$$

9.1 Atsitiktinių dydžių dispersijų skaičiavimas

Apskaičiuokime anksčiau nagrinėtų atsitiktinių dydžių dispersijas. Jeigu dydis įgyja tik vieną reikšmę, t.y. yra išsigimęs, tai jo dispersija lygi nuliui. Tegu X yra Bernulio atsitiktinis dydis, įgyjantis dvi reikšmes:

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=q, \quad q=1-p.$$

$$\mathbf{E}X^2=p, \quad \mathbf{D}X=\mathbf{E}X^2-(\mathbf{E}X)^2=p-p^2=pq.$$

Tegu dabar X yra binominis dydis, $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. Šį dydį galime suvokti kaip sėkmių skaičių Bernulio schemoje ir išreikšti nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n, \quad X=\begin{cases}1, & \text{jei } i\text{-asis bandymas sėkmingas,}\\ 0, & \text{jei } i\text{-asis bandymas nesėkmingas.}\end{cases}$$

Jau apskaičiavome dydžių, įgyjančių reikšmes 0, 1 dispersiją, taigi $\mathbf{D}X_i=pq$. Pasinaudoję nepriklausomų atsitiktinių dydžių dispersijos savybe gausime

$$\mathbf{D}X=\mathbf{D}X_1+\mathbf{D}X_2+\ldots+\mathbf{D}X_n=npq.$$

Tegu dabar X yra Puasono dydis, $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$. Žinome, kad $\mathbf{E}X=\lambda$:

$$\mathbf{E}X=\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda.$$

$$\mathbf{E}X^2=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\cdot\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\frac{\lambda^m}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}(m-1+1)\cdot\frac{\lambda^m}{(m-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}+\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\mathbf{E}X+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

$$\mathbf{D}X=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Jeigu Bernulio schemos bandymus atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius X bus geometrinis dydis, $X\sim\mathcal{G}(p)$. Apskaičiavome jo vidurkį $\mathbf{E}X=\dfrac{1}{p}$. Jeigu žinotume $\mathbf{E}X^2$ reikšmę, galėtume apskaičiuoti ir $\mathbf{D}X$. Pabandykime surasti $\mathbf{E}X^2$ pasinaudodami tam tikrais samprotavimais. Jeigu pirmajame bandyme pasitaikys sėkmė (tai įvyksta su tikimybe p), tai $X^2=1^2=1$. Jeigu pirmajame bandyme nesėkmė, tai viskas prasideda tarsi iš pradžių ir $X^2=(1+Y)^2$, čia $Y\sim\mathcal{G}(p)$ yra taip pat geometrinis dydis su sėkmės tikimybe p. Taigi

$$\mathbf{E}X^2=p\cdot 1^2+q\cdot\mathbf{E}(1+Y)^2.$$

Pažymėkime $a=\mathbf{E}X^2=\mathbf{E}Y^2$ ir atlikime pertvarkymus, pasinaudodami $\mathbf{E}Y=\dfrac{1}{p}$:

$$a=p+q\mathbf{E}[1+2Y+Y^2]=p+q+2q\mathbf{E}Y+q\mathbf{E}Y^2=1+\frac{2q}{p}+qa$$

$$(1-q)a = 1 + \frac{2q}{p}, \quad a = \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2}.$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Tegu urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių, atsitiktinai traukiame $u(u \leq m+n)$, rutulių. Atsitiktinis dydis X – baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų, turi hipergeometrinį skirstinį $X \sim \mathcal{H}(m,n,u)$. Jau žinome, kad šio dydžio vidurkis lygus

$$\mathbf{E}X = u \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Vidurkį apskaičiavome išreiškę atsitiktinį dydį X vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_u$ suma. Šio dydžio dispersijos taip apskaičiuoti negalėsime, nes dydžiai yra priklausomi, dėl to dispersijos savybė 4 negalioja. Hipergeometrinio dydžio dispersija yra lygi

$$\mathbf{D}X = u \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m+n-u}{m+n-1}.$$

Tegu X – tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Žinome, kad šio dydžio vidurkis $\mathbf{E}X = \dfrac{b+a}{2}$. Rasime jo dispersiją.

$$\mathbf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Panagrinėkime eksponentinį dydį $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Žinome, kad $\mathbf{E}X = \dfrac{1}{\lambda}$. Taigi, kad surastume dispersiją, turėtume apskaičiuoti

$$\mathbf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{\infty} x^2 de^{-\lambda x} = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= -\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} = -\frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}.$$
$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Apskaičiuosime standartinio normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ dispersiją. Pagal Muavro-Laplaso teoremą, į šį dydį, kai $n \to \infty$ vis labiau darosi "panašus" atsitiktinis dydis Y_n, susijęs su Bernulio schema:

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}},$$

čia S_n yra sėkmių skaičius Bernulio schemoje, taigi $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Galime tikėtis, kad ir dydžio Y_n vidurkis, ir dispersija artėja prie $\mathbf{E}X$ bei $\mathbf{D}X$. Iš tikrųjų,

$\mathbf{E}Y_n = \mathbf{E}X = 0$, o

$$\mathbf{D}Y_n = \mathbf{E}Y_n^2 = \mathbf{E}\left[\left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right)\right]^2 = \frac{\mathbf{D}S_n}{\mathbf{D}S_n} = 1.$$

Taigi $\mathbf{D}X = 1$. Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tai tokį dydį galime išreikšti standartiniu normaliuoju dydžiu: $X = \sigma X_0 + \mu$, čia $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Taigi

$$\mathbf{D}X = \mathbf{D}[\sigma X_0 + \mu] = \mathbf{D}[\sigma X_0] + \mathbf{D}[\mu] = \sigma^2 \mathbf{D}[X_0] + 0 = \sigma^2.$$