4 Paskaita. Nepriklausomi eksperimentai

4.1 Bernulio schema

Tarkime, n kartų kartojamas bandymas, kurio baigčių aibė $\Omega_1 = \{0, 1\}$. Baigtį 0 vadinsime *nesėkme*, o baigtį 1 – *sėkme*. Bandymų serijos baigčių aibė yra

$$\Omega = \Omega_1^n = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = 0, 1\}.$$

Reikia apibrėžti baigčių $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ tikimybes. Baigtį w galime interpretuoti kaip įvykių sankirtą: pirmajame bandyme pasirodė w_1, antrajame – w_2 ir t.t. Pažymėkime $P(w_m|w_1, w_2, \ldots, w_{m-1})$ tikimybę, kad m-ajame bandyme pasirodė w_m su sąlyga, kad ankstesniuose bandymuose pasirodė $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$. Tikimybę $P(w)$ galime apskaičiuoti pasinaudoję tikimybių sandaugos teorema:

$$P(w) = P(w_1)P(w_2|w_1) \ldots P(w_n|w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}).$$

Tarkime dabar, kad bandymai nepriklauso vienas nuo kito. Sėkmės tikimybė visuose bandymuose yra ta pati ir lygi $p(0 \leq p \leq 1)$, o nesėkmės – $q = 1 - p$. Tada $P(w_m|w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}) = P(w_m)$, čia $P(w_m) = p$, jei $w_m = 1$ (sėkmė) ir $P(w_m) = q$, jei $w_m = 0$ (nesėkmė). Taigi $P(w_m) = p^{w_m} q^{1-w_m}$.

Tada baigties $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ tikimybė

$$P(w) = p^{w_1} q^{1-w_1} \cdot p^{w_2} q^{1-w_2} \cdot \ldots \cdot p^{w_n} q^{1-w_n}.$$

Pažymėję $s(w) = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, gausime

$$P(w) = p^{s(w)} q^{1-s(w)}.$$

Ką tik sudaryta diskrečioji tikimybinė erdvė vadinama *Bernulio schema*.

Apibrėžimas. *Bernulio schema vadiname diskrečiąją tikimybinę erdvę* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, *čia* $\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = 0, 1\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ *yra visų* Ω *poaibių* $\sigma-$*algebra, kiekvienam elementariajam įvykiui* $w \in \Omega, w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$,

$$P(w) = p^{s(w)} q^{1-s(w)}, s(w) = w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

Bernulio schema yra n vienodų ir nepriklausomų bandymų su dviem baigtimis ir tomis pačiomis šių baigčių tikimybėmis matematinis modelis. Tokio bandymo pavyzdys – monetos mėtymas. Pateiksime formulę suskaičiuoti tikimybei, kad bandymą pakartoję n kartų gausime m sėkmių.

Teorema. *Tegu* S_n *– sėkmių skaičius* n *nepriklausomų bandymų serijoje su sėkmės ir nesėkmės viename bandyme tikimybėmis* $p, q = 1 - p, 0 \leq p \leq 1$. *Tada*

$$p_n(k) = P(S_n(w) = k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1}$$

Tikimybių rinkinį (1) vadiname *Binominiu skirstiniu.* Išskleidę dvinarį $(px+q)^n$ pagal Niutono binomo formulę,

$$(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k$$

matome, kad $p_n(k)$ yra koeficientas prie x^k šiame skleidinyje. Pastaroji formulė yra specialus vadinamųjų generuojančiųjų funkcijų atvejis. Bernulio schema ir binominis skirstinys pasirodo įvairiuose tikrovės reiškinių modeliuose, pavyzdžiui, tyrinėjant atsitiktinį dalelės klaidžiojimą plokštumos taškais, kurių koordinatės yra sveikieji skaičiai.

Pavyzdys. Dalelės klaidžiojimas.

Su Bernulio schemos elementariuoju įvykiu $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ susiekime laužtę, kuri jungia plokštumos taškus

$$(0,0), (1, w_1), (2, w_1 + w_2), \ldots, (n, w_1 + w_2 + \ldots + w_n).$$

Tada tuos w, kuriems $S_n(w) = k$ atitinka laužtės, kurios baigiasi taške (n, k). Šios laužtės gali tik kilti į viršų.

Pavyzdys. Tarkime, vyksta teismas, kuriame 12 prisiekusiųjų žiūri turi nuspręsti, ar teisiamasis kaltas. Kaltinamąjam nuosprendžiui paskelbti pakanka 8 iš 12 teisėjų balsų, t.y. mažiausiai 8 teisėjai turi balsuoti už tai, kad teisiamasis būtų paskelbtas kaltu. Tarkime, kad teisėjai balsuoja nepriklausomai vienas nuo kito, ir kad kiekvienas iš jų priima teisingą sprendimą su tikimybe θ. Kokia tikimybė, kad teismas priims teisingą sprendimą kaltinamojo atžvilgiu?

Sprendimas. Uždaviniui išspręsti nepakanka informacijos. Pavyzdžiui, jei teisiamasis nekaltas, teisingas sprendimas yra jo nenuteisti. Tikimybė, kad prisiekusiųjų žiūri priims teisingą sprendimą

$$\sum_{i=5}^{12} C_{12}^i \theta^i (1-\theta)^{12-i},$$

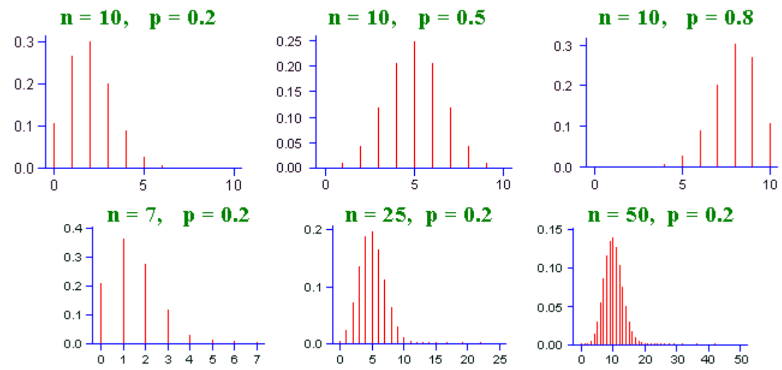
tuo tarpu, jei teisiamasis kaltas, teisingas sprendimas yra jį nuteisti. Šio sprendimo tikimybė

$$\sum_{i=8}^{12} C_{12}^i \theta^i (1-\theta)^{12-i}.$$

Taigi, jei pažymėsime α tikimybę, kad teisiamasis yra kaltas, žiūri priims teisingą sprendimą, priklausomai nuo to, ar jis iš tikrųjų yra kaltas, ar nekaltas su tokia teisingo sprendimo tikimybe:

$$\alpha \sum_{i=8}^{12} C_{12}^i \theta^i (1-\theta)^{12-i} + (1-\alpha) \sum_{i=5}^{12} C_{12}^i \theta^i (1-\theta)^{12-i}.$$

Tikimybė $p_n(k)$ yra p, n ir k funkcija. Fiksuokime p. Kaip tada kinta $p_n(k)$ kintant k? Mums rūpi rasti tas k reikšmes, kurioms $p_n(k)$ yra didžiausia. Jos vadinamos *tikėtiniausiomis* įvykių ω reikšmėmis ir žymėsime k_0.



1 pav.: Binominio skirstinio tikėtiniausios reikšmės.

Tikėtiniausios reikšmės tikimybė $p_n(k_0)$ esant pakankamai dideliems n, kiek norima mažai skiriasi nuo tikimybės p. Tikėtiniausios reikšmės ieškosime iš nelygybių

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Pavyzdys. Metame lošimo kauliuką 50 kartų, metimai nepriklausomi. Kokia tikėtiniausia šešių akučių atvirtimo reikšmė?

Turime: $n = 50, p = 1/6, q = 5/6$. Tuomet

$$50 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq k_0 \leq 50 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow 7,5 \leq k_0 \leq 8,5.$$

Sveikasis skaičius tarp 7,5 ir 8,5 yra 8. Taigi $k_0 = 8$. Šio įvykio tikimybė $p_n(k_0) = C_{50}^{8} \left(\frac{1}{6}\right)^{8} \left(\frac{5}{6}\right)^{42} \approx 0,151$. Matome, kad $p_n(k_0)$ nedaug skiriasi nuo $1/6 \approx 1.67$.

4.2 Puasono teorema

Nagrinėkime Bernulio schemą. Jei atlikome 100 monetos metimų, o herbo atsiverimo tikimybė $p = 1/10$, tai tikėtinas herbo pasirodymų skaičius galėtų būti 10. Metus moneta 1000 kartų, galėtume tikėtis, kad apytiksliai 100 kartų asivertė herbas. Apskritai, po n metimų, herbo atsivertimų skaičius k turėtų atspindėti herbo atsivertimo šansus p ir todėl tikėtina, kad $k \approx np$.

Jei turėtume skirtingų nesimetrinių monetų rinkinį su atitinkamomis p reikšmėmis $p_1, p_2, \ldots$ tokiomis, kad

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \tag{2}$$

tai atlikę n eksperimentų su n-ta moneta, galetume tikėtis, kad apytikriai $np_n = \lambda$ kartų atsivers herbas. Kokia tikimybė, kad n-to eksperimento metu herbas atsivers k kartų? Tikslų atsakymą pateikia binominės tikimybės formulė (1). Tačiau ja nevisada lengva naudotis. Pasirodo, kad esant patenkintai sąlygai (2), binominę tikimybę galime apytiksliai apskaičiuoti, panaudojant Puasono tikimybę.

Teorema. *Tarkime, kad sąlyga* (2) *yra patenkinta su* $\lambda < \infty$. *Tuomet visiems* $k = 0, 1, 2 \ldots$, *kai* $n \to \infty$

$$p_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{3}$$

Pastaba. Jei $\lambda = 0$ ir $k = 0$, tai dešinei (3) lygybės pusei priskiriame reikšmę 1.

Pavyzdys. Tarkime, tikimybė, kad tam tikros mašinos pagaminta detalė bus brokuota, yra lygi 0,1. Raskite tikimybę, kad iš 10 detalių bus ne daugiau kaip 1 brokuota.

Sprendimas. Pažymėkime X – brokuotų detalių skaičių iš 10.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{10}^0 0,1^0 0,9^{10} + C_{10}^1 0,1^1 0,9^9 \approx 0.7361.$$

Pasinaudoję Puasono aproksimacija su parametru $\lambda = 10 \cdot 0,1 = 1$, gauname

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1} + e^{-1} \approx 0.7358.$$

Pavyzdys. Tarkime, kad tipografinių klaidų skaičius knygos puslapyje turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda = 1/2$, t.y. klaidų puslapyje skaičiaus tikimybę gali būti apskaičiuota pagal formulę (3). Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai atverstame knygos puslapyje bus bent vieną klaida.

Sprendimas. Pažymėkime X – klaidų skaičių puslapyje.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} e^{-1/2} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393.$$

4.3 Polinominė schema

Apibendrinkime Bernulio schemą. Tarkime, kad vieno bandymo skirtingų baigčių yra ne dvi, bet $r (r > 2) : \Omega_1 = \{1, 2, \ldots, r\}$, o šių baigčių tikimybės lygios atitinkamai

$$p_1, \ldots, p_r, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$$

Tarkime, kad tą patį bandymą kartojame n kartų ir vienas bandymas nedaro įtakos kitam. Tada tokios bandymų sekos baigtys yra gretiniai

$$w = (n, w_1, w_2, \ldots, w_n), \quad w_i \in \{1, 2, \ldots, r\},$$

o jų tikimybės

$$P(w) = p_{w_1} p_{w_2} \ldots p_{w_n}.$$

Pavyzdys. Metame lošimo kauliuką n kartų. Manome, kad metimai yra nepriklausomi. Kiekvieną kartą gali atvirsti 1, 2, ..., 6 akutės. Jei kauliukas simetriškas, kiekvieno iš tų įvykių tikimybė yra 1/6. Turime apibendrintąją Bernulio eksperimentų schemą.

Tikimybinę erdvę, kuri aprašo n nepriklausomų vienodų bandymų su baigčių skaičiumi r seką, vadinsime *polinomine schema*. Kai $r = 2$, ji virsta Bernulio schema.

Apibrėžimas. *Polinomine schema vadiname diskrečiąją tikimybinę erdvę* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, *čia* $\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ *yra visų* Ω *poaibių* $\sigma-$*algebra, kiekvienam elementariąjam įvykiui* $w \in \Omega, w = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$P(w) = p_{w_1} p_{w_2} \ldots p_{w_n}.$$

Teorema. *Tegu* S_n^i – n *vienodų ir nepriklausomų bandymų serijoje pasirodžiusių baigčių* i *skaičius,* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – *baigčių* $1, 2, \ldots, r$ *pasirodymo tikimybės viename bandyme.* $p, q = 1-p, 0 \le p \le 1$. *Tada su visais* $m_i \ge 0, m_1 + \ldots + m_r = n$,

$$p(n, m_1, \ldots, m_r) = P(S_n^1 = m_1, \ldots, S_n^r = m_r) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_r!} p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r},$$

čia $m_i \ge 0, \quad m_1 + \ldots + m_r = n$. Šis tikimybių rinkinys vadinamas *polinominiu skirstiniu*. Šia schema galime naudotis, pavyzdžiui, skaičiuojant tikimybes, susijusias su lošimo kauliuko mėtymų serija ir pan. Išskleidę reiškinį $(p_1 x_1 + \ldots + p_r x_r)^n$ pagal multinomo taisyklę, gauname, kad $p(n, m_1, \ldots, m_r)$ yra koeficientas prie $x_1^{m_1} \ldots x_r^{m_r}$.

Pavyzdys. Fabrikas gamina detales. Jos arba atitinka standartus, arba yra per ilgos, arba per trumpos. Tikimybė, kad detalė bus per ilga, lygi 0,01, kad bus per trumpa, – 0,03. Atsitiktinai parenkama 100 detalių. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 per ilgos, 3 per trumpos, o visos kitos standartinės?

Sprendimas. Turime, $p_1 = 0,01, p_2 = 0,03, p_3 = 0,96$. Taigi pagal gautąja formulę

$$p(100, 2, 3, 95) = \frac{100!}{2!3!95!} 0,01^2 0,03^3 0,96^{95} \approx 0,042.$$