2 Paskaita. Tikimybių teorijos aksiomos.

2.1 Aibių algebros ir $\sigma-$algebros

Jau žinome, kad norėdami apibrėžti tikimybę, turime apibrėžti tikimybinę erdvę, t.y. trejetą $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Iki šiol nagrinėjome bandymus su vienodai galimomis baigtimis – klasikinį ir geometrinį modelius. Tačiau nagrinėjant sudėtingus praktikos uždavinius, pasirodė, kad nevisuomet pasiseka sukonstruoti tokį statistinio eksperimento modelį, kuriame galime apibrėžti tikimybes $P(A)$ visiems elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibiams $A \in \Omega$. Todėl dažnai tenka pasirinkti tam tikrą aibės Ω poaibių poklasį $\mathcal{A}$ ir tik aibėms $A \in \mathcal{A}$, kurios yra šio poklasio nariai, apibrėžiame tikimybes $P(A)$. Tam kad trejetas $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ galėtų vadintis tikimybine erdve, aibių poklasiui $\mathcal{A}$ turi priklausyti bet kurių jam priklausančjų aibių A ir B sąjunga, sankirta ir priešingas įvykis $A \cup B, A \cap B, \bar{A}$. Aibių rinkinius, kurie tenkina šias sąlygas vadiname aibių algebromis.

Apibrėžimas. *Tegu Ω yra netuščia aibė. Jos poaibių sistemą $\mathcal{A}$ vadinsime σ-algebra, jei tenkinamos šios sąlygos:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. *jei* $A \in \mathcal{A}$, *tai ir* $\bar{A} \in \mathcal{A}$;
3. *jei* $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots,$ *tai* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Pati "skurdžiausia" $\sigma-$algebra turi tik 2 elementus $\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}$. Pačiai "turtingiausiai" priklauso visi aibės Ω poaibiai $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(\Omega)$. Aišku, kad $\emptyset \in \mathcal{A}$ teisinga bet kuriai $\sigma-$algebrai. Jei poaibių sistema $\mathcal{A}$ tenkina pirmąsias dvi apibrėžimo savybes, o trečiąją tenkina tik su baigtiniu aibių skaičiumi, tai $\mathcal{A}$ vadinama *aibių algebra.* Bet kokia aibių $\sigma-$algebra yra tuo pačiu ir algebra. Bet kokia baigtinė algebra yra tuo pačiu ir $\sigma-$algebra.

Teorema. Tegu $\mathcal{A}$ yra aibės Ω σ-algebra. Teisingi tokie teiginiai:

1. jei $A_i \in \mathcal{A}, i \in I$ yra baigtinė arba skaiti aibių iš $\mathcal{A}$ šeima, tai $\cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$;
2. jei $A, B \in \mathcal{A}$, tai $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Čia $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Pavyzdys. Aibių $\sigma-$algebrą sudaro poaibių junginys $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$.

Pavyzdys. Tegu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Be to, norime, kad $\sigma-$algebrai priklausytų įvykiai $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{3, 4, 5\}$. Kaip sudaryti įvykių $\sigma-$algebrą? Reikia papildyti rinkinį iki mažiausios $\sigma-$algebros, kuriai priklauso šie įvykiai, t.y. papildomai įtraukti įvykius $\emptyset, \Omega$, įvykių A_i papildinius $\bar{A}_i$, įvykių sąjungas, sankirtas ir jų papildinius:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4, 5\}, \Omega\}$$

Kyla klausimas: ar visada galime įvykių sistemą papildyti iki $\sigma-$algebros? Atsakymas yra – visada.

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{S}$ yra netuščios aibės Ω poaibių sistema. Jei $\sigma-$algebra $\mathcal{A}$ tenkina sąlygą $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ir su bet kuria kita $\sigma-$algebra $\mathcal{A}'$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}'$, teisinga $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, tai $\sigma-$algebra $\mathcal{A}$ vadinama $\sigma-$algebra, generuota $\mathcal{S}$ ir žymima $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$. $\mathcal{A}$ yra mažiausia $\sigma-$algebra, kuriai priklauso aibių sistema $\mathcal{S}$.*

Teorema. Bet kuriai poaibių sistemai $\mathcal{S}$ $\sigma(\mathcal{S})$ egzistuoja.

Dabar, kai mes turime aibę Ω ir jos poaibių $\sigma-$algebrą $\sigma(A)$, liko įvesti tikimybinį matą, tuomet galėsime skaičiuoti (matuoti) tikimybes. Apibrėšime matą tikimybėms skaičiuoti.

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių $\sigma-$algebra. Funkciją $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ vadinsime tikimybiniu matu arba tiesiog tikimybe, jei*

- *$P(\Omega) = 1$;*
- *jei $A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, \ldots, i \neq j)$, tai*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Antroji sąlyga vadinama $\sigma-$adityvumo sąlyga. Ši sąlyga reikalauja, kad tarpusavyje nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė būtų lygi įvykių tikimybių sumai, kai įvykių skaičius baigtinis arba begalinis. Jei ši sąlyga galioja tik baigtiniam aibių skaičiui, ji vadinama adityvumo sąlyga.

Apibrėžimas. *Trejetą $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, čia Ω – netuščia aibė, $\mathcal{A}$ yra aibės Ω poaibių $\sigma-$algebra, P – tikimybinis matas, vadinsime tikimybine erdve.*

Pavyzdys. Borelio $\sigma-$algebra yra svarbus $\sigma-$algebrų pavyzdys. Tegu $\mathcal{S}$ yra realiųjų skaičių aibės $\mathcal{R}$ intervalų $[a, b)$ sistema. Tada $\sigma(\mathcal{S})$ vadinama Borelio $\sigma-$algebra. Borelio $\sigma-$algebra $\mathcal{B}$ yra labai svarbi aibių klasė. Jai priklauso visi atviri, uždari ar pusiau atviri intervalai, bet kokie skaitūs jų junginiai ir sankirtos. Realiųjų skaičių aibės poaibius, kurie priklauso Borelio $\sigma-$algebrai, vadinsime tiesiog Borelio aibėmis. Aibė, sudaryta iš vieno taško taip pat yra Borelio aibė, nes ji gali būti užrašyta, kaip skaičios intervalų sistemos sankirta

$$\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n).$$

Taigi baigtinės skaičių aibės, racionaliųjų, irracionaliųjų skaičių aibės yra Borelio aibės. Borelio aibių sistema yra labai plati. Jai priklauso ne tik visi intervalai, bet ir visos atviros, visos uždaros ir dar sudėtingesnės aibės. Borelio aibių rinkinys $\mathcal{B}$ nesutampa su pačia didžiausia $\mathcal{R}$ poaibių $\sigma-$algebra, kuri yra sudaryta iš visų $\mathcal{R}$ poaibių.

Pavyzdys. Metame lošimo kauliuką, kurio sienelės su lyginiu akučiu skaičiumi nuspalvintos baltai, o likusios juodai. Elementariųjų įvykių aibė $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Kadangi visos sienelės turi vienodus šansus atsiversti, tai elementariesiems įvykiams priskiriame vienodas tikimybes: $P(w_i) = 1/6, i = 1, 2, \ldots, 6$.

1 eksperimentas. Registruojame iškritusių akučių skaičių. Šį kartą visi elementarieji įvykiai svarbūs. Todėl pirmo eksperimento įvykių $\sigma-$algebrą $\mathcal{A}_1$ sudaro visi Ω poaibiai. Eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{A}_1, P)$.

2 eksperimentas. Registruojame iškritusios sienelės spalvą. Šį kartą mums svarbu ar iškrito balta spalva (akučių skaičius lyginis) ar juoda (akučių skaičius nelyginis). Todėl antro eksperimento įvykiams aprašyti pakanka $\sigma-$algebros $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{w_1, w_3, w_5\}, \{w_2, w_4, w_6\}, \Omega\}$. Eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{A}_2, P)$.

Pavyzdys. Turime baigtinę aibę $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Nagrinėkime aibių rinkinį $\mathcal{A}$, sudarytą iš visų poaibių, ir tikimybinį matą P, kuris aibei $A \subset \Omega$ priskiria tikimybę $P(A)$ proporcingą tos aibės elementų skaičiui. Iš sąlygos $P(A) = 1$ išplaukia lygybė $P(w_i) = 1/n$ visiems i. Todėl $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{n}$. Tokį tikimybinį matą vadiname tolygiuoju, nes visų elementariųjų įvykių tikimybės $P(w_i) = 1/n$ yra vienodos.

Pavyzdys. Skaičiai elementariųjų įvykių aibei $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots\}$ tolygiojo tikimybinio mato apibrėžti negalime (jei taip būtų, tai turėtume $P(w_i) = p$ visiems i ir todėl gautume $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = \infty$. Todėl pasirenkame neneigiamų skaičių seką $\{p_i\}$, tenkinančią $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ ir apibrėžiame $P(w_i) = p_i$. Tuomet bet kuriai aibei $A \subset \Omega$ galime apibrėžti tikimybę $P(A) = \sum_{i \in A} p_i$. Šiuo atveju galime nagrinėti tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kur $\mathcal{A}$ yra sudaryta iš visų Ω poaibių.

Du svarbūs tikimybių rinkinių pavyzdžiai:

1. Rinkinys $\{p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, kur $\lambda > 0$ yra fiksuotas parametras, apibrėžia tikimybinį matą, kurį vadiname Puasono matu, žymime $\mathcal{P}(\lambda)$;

2. Rinkinys $\{p_n = p(1-p)^n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, kur $p \in (0, 1)$ yra fiksuotas parametras, apibrėžia tikimybinį matą, vadinamą geometriniu matu.

2.2 Tikimybinio mato savybės

Nagrinėsime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Laikysime, kad visi įvykiai priklauso $\sigma-$algebrai $\mathcal{A}$.

Teorema. *Teisingi tokie teiginiai:*

1. $P(\emptyset) = 0$*;*

2. *lygybė* $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ *teisinga bet kokiai baigtinei arba skaičiai nesutaikomų įvykių sistemai* $A_i, i \in I$*;*

3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$*; atskiru atveju* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$*;*

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Įrodymas. 1. teiginys išplaukia iš mato savybių ir aibių lygybių $\Omega \cup \emptyset = \Omega, \Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Imkime be galo daug aibių $\emptyset$:

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \Rightarrow P(\emptyset) = 0;$$

2. Jei I yra skaiti aibė, nieko naujo netvirtiname. Jei I yra baigtinė, papildome ją tuščiomis aibėmis iki skaičios įvykių šeimos ir pasinaudokime $\sigma-$adityvumo savybe ir lygybe $P(\emptyset) = 0$;
3. Įvykiai $A \setminus B$ ir $A \cap B$ yra nesutaikomi, jų sąjunga lygi A. Taigi

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

iš čia išplaukia tvirtinimas 3.;
4. Įvykiai $A \setminus B$ ir B yra nesutaikomi, jų sąjunga lygi $A \cup B$. Taigi pakanka pritaikyti 2. ir 3. dalis:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

2.3 Tikimybės monotoniškumas

Matematikoje kertinį vaidmenį vaidina funkcijos tolydumo sąvoka. Kadangi tikimybinis matas P taip pat yra atvaizdis (aibėms priskiriantis skaičius), tai yra prasminga nagrinėti jo tolydumą. Yra keletas būdų apibrėžti mato tolydumą. Čia nagrinėjamos tolydumo sąvokos yra labai tampriai susietos su mato $\sigma-$adityvumo savybe. Įrodysime dvi teoremas apie "didėjančių" ir "mažėjančių" įvykių tikimybes.

Teorema. *Tegu įvykiai $A_n, n = 1, 2, \ldots$ monotoniškai didėja:*

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots, A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tada $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Įvykiai $B_m = A_m \cap \overline{A_{m-1}}$ yra nesutaikomi; čia $A_0 = \emptyset$. Be to,

$$A_n = \cup_{m=1}^{n} B_m, A = \cup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Pritaikę $\sigma-$adityvumo savybę, gausime

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Analogiška teotema teisinga ir mažėjančių įvykių sekai.

Teorema. *Tegu įvykiai $A_n, n = 1, 2, \ldots$ monotoniškai mažėja:*

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tada $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Priešingų įvykių seka yra didėjanti $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \ldots$.

$$\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = \overline{A}.$$

Čia rėmėmės De Morgano dėsniais, siejančiais aibių papildinius bei sąjungos ir sankirtos veiksmus. Pagal ką tik įrodytą teoremą

$$P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) \to P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Tai ekvivalentu teoremos tvirtinimui. Iš ką tik įrodytų teoremų išplaukia, kad tikimybinis matas P yra tolydusis iš "apačios" ir iš "viršaus".

2.4 Įdėties – pašalinimo (rėčio) principas

Tikimybių uždaviniuose kartais tenka skaičiuoti įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sąjungos tikimybę, t.y. tikimybę, kad įvyks bent vienas iš įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jei įvykiai yra nesutaikomi, t.y. $A_i \cap A_j, i \neq j$, tai sąjungos tikimybė lygi

$$P(A_1 \cup A_2, \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Jei įvykiai nėra nesutaikomi, ši lygybė gali būti ir neteisinga. Ją reikia koreguoti. Pvz., jau žinome, kad kai turime tik du įvykius,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2). \quad (1)$$

Didesnio įvykių skaičiaus sąjungos tikimybei skaičiuoti naudojame rėčio formulę.

Teorema. *Bet kokiems įvykiams $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$ teisinga lygybė*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r, \quad (2)$$

čia

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

Kai $n = 2$, (2) sutampa su (1). Kai $n = 3$, (2) atrodys taip:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Pavyzdys. Iš 100 studentų, esančių auditorijoje 50 moka anglų kalbą, 40 moką prancūzų, 35 moka vokiečių kalbą. Anglų ir prancūzų kalbas moka 20 studentų, anglų ir vokiečių – 8, prancūzų ir vokiečių – 10. Visas tris kalbas moka 5 studentai. Vienas iš studentų išėjo iš auditorijos. Apskaičiuokite įvykių tikimybes:

$$A = \{\text{išėjęs studentas moka anglų arba prancūzų kalbą}\}.$$

$$B = \{\text{išėjęs studentas nemoka ne vienos užsienio kalbos}\}.$$

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

1. $A_A = \{\text{išėjęs studentas moka anglų kalbą}\}$.
2. $A_P = \{\text{išėjęs studentas moka prancūzų kalbą}\}$.
3. $A_V = \{\text{išėjęs studentas moka vokiečių kalbą}\}$.

Kadangi $A = A_A \cup A_P$, pasinaudosime tikimybių sudeties formule (1):

$$P(A) = P(A_A \cup A_P) = P(A_A) + P(A_P) - P(A_A \cap A_P) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7.$$

Pagal De Morgano dėsnį, $B = \overline{A_A} \cap \overline{A_P} \cap \overline{A_V} = \overline{A_A \cup A_P \cup A_V}$, tikimybės skaičiavimui pasinaudosime rėčio formule (2):

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_A \cup A_P \cup A_V}) = 1 - P(A_A \cup A_P \cup A_V) = 1 - (P(A_A) + P(A_P) + P(A_V) \\ &\quad -P(A_A \cap A_P) - P(A_A \cap A_V) - P(A_P \cap A_V) + P(A_A \cap A_P \cap A_V)) \\ &= 1 - (0,5 + 0,4 + 0,35 - 0,2 - 0,08 - 0,1 + 0,05) = 0,08. \end{aligned}$$