Paskaita 10

Simplekso metodo algoritmas

Sprendžiame kanoninę formos uždavinį:

$$\begin{cases} c^T x \longrightarrow \max\limits_{x \geq 0} & x \in \mathbb{R}^n, \ c \in \mathbb{R}^n \\ A x = b & b \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

A $m \times n$ dimensijos matrica

Apribojimų sistema

$$A x = b, \quad x \geq 0$$

apibrėžia leistinų vektorių aibę.

Parodėme, kad didžiausią reikšmę tikslo tiesinė forma pasiekia kuriame nors kraštiniame taške

Reikia mokėti surasti kraštinius taškus (uždav. 1)

Lema 1. Leistinų taškų aibės X kraštinis taškas x turi ne daugiau nei m teigiamų koordinačių.

Įrodymas. Tegul $x \in X$ yra kraštinis taškas (t.y. jo negalime užrašyti kaip leistinų dviejų taškų $x^1, x^2 \in X$ tiesinę kombinaciją $x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$, $0 < \lambda < 1$), bet jis turi $(m+1)$ teigiamų koordinatę

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad , \quad x_{m+1} > 0$$

(visada galime taip numeruoti koordinates).

Sudarome matricą A^1:

$$A^1 = (a^1, a^2, \dots, a^{m+1})$$

(t.y. paliekame tik pirmuosius $m+1$ stulpelius) Dimensija $m \times (m+1)$

$$A^1 X = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1,m+1} x_{m+1} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2,m+1} x_{m+1} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{m,m+1} x_{m+1} \end{cases}$$

Nagrinėkime uždavinį

$$A^1 Z = 0.$$

Kadangi $Z \in \mathbb{R}^{m+1}$, o lygčių yra tik m, tai būtinai $\exists$ nenulinis sistemos sprendinys $Z \neq 0$

Apibrėžkime $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \bar{X} \in \mathbb{R}^n$$

Nagrinėkime du vektorius

$$x^1 = x + \varepsilon \bar{x}$$

$$x^2 = x - \varepsilon \bar{x}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 > 0, \dots, x_{m+1} > 0$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{m+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$ Tarp $z_1, \dots, z_{m+1}$ yra bent vienas nenulinis koeficientas

Kadangi $x_1 > 0, \dots, x_{m+1} > 0$, o $x_j = 0$, $j = m+2, \dots, n$, tai

<u>Visada galime parinkti</u> tokį mažą

$\varepsilon > 0$, kad,

$$x^1 \geq 0, \quad x^2 \geq 0,$$

Kita vertus $A = (A^1 | A^p)$

$$A\bar{x} = A^1 z + A^p \cdot 0 = A^1 z$$

$$Ax^1 = Ax + \varepsilon A \bar{x} = Ax + \varepsilon A^1 z = b$$

$$Ax^2 = Ax - \varepsilon A^1 z = b \quad (A^1 z = 0)$$

$\Rightarrow x^1, x^2 \in X$ leistiniai vekt.

Bet tada

$$x = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right),$$

o tai prieštarauja prielaidai, kad x yra kraštinis taškas $\triangleright$

<u>Lema 2</u>. Apribojimų sąlygų stulpeliai, atitinkantys <u>kraštinių</u> taškų teigiamas koordinates, yra tiesiškai nepriklausomi.

<u>Įrodymas</u>. Tegul $x_1, \dots, x_k$ yra taško x teigiamos koordinatės, o $a^1, a^2, \dots, a^k$ yra atitinkami matricos A stulpeliai, t. y.

$$a^1 x_1 + \dots + a^k x_k = b.$$

(Atkreipkite dėmesį, kad $a^j x_j$ yra stulpelis vektorius a^j padaugintas iš konstantos x_j).

Tarkime, kad lemos teiginys neteisingas ir vektoriai $a^1, \dots, a^k$ yra tiesiškai priklausomi.

$$a^1\lambda_1 + \dots + a^k\lambda_k = 0.$$

Tada turime vektorių $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \in R^n$

$$\boxed{A\lambda = 0}$$

ir $\lambda \neq 0$.

Iš ankstesnių lygybių gauname

$$a^1(x_1 \pm \varepsilon\lambda_1) + \dots + a^k(x_k \pm \varepsilon\lambda_k) = b$$

Taigi, jei ε - pakankamai mažas,

$$x^1 = x + \varepsilon\lambda \geq 0, \quad x^2 = x - \varepsilon\lambda \geq 0$$

$$Ax^j = b, \; j = 1, 2.$$

ir abu vektoriai ~~tenkina~~ apribojimus, ~~taigi~~ gavome du leistinus vektorius.

Bet tada x yra išreiškiamas tiesine kombinacija:

$$x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$$

ir x tada nėra kraštinis taškas. ▲

Norėdami supaprastinti analizę ir algoritmo realizaciją tarsime, kad apribojimų matrica A ~~uždavinys~~ yra tokia, kad nėra tokių kraštinių taškų kurių teigiamų koordinačių skaičius yra mažesnis už matricos A rangą rank A. (taigi, tada tokių koord. yra ne mažiau, nei rank A)

---

a) Iš Lemos 1 žinome, kad teigiamų koordinačių skaičius (kraštiniam taškams) negali būti didesnis už m.

b) Iš Lemos 2 ir prielaidos, kad uždavinys yra neišsigimęs, t.y. rank A = m, žinome, kad tokių koordinačių turi būti m.

Svarbus klausimas!

c) Tarkime, kad radome leistiną tašką $x \in X$ ir jis turi m teigiamų koordinačių. Ar $x \in X$ būtinai yra kraštinis vektorius?

Lema 3. Jeigu A yra neišsigimusi ir leistinas taškas $x \in X$ turi m teigiamų koordinačių $(x_j > 0,\ j = 1, \dots, m)$ tada x yra kraštinis vektorius.

Be įrodymo.

Išvada. Leistinas taškas $x \in X$ yra kraštinis $\Longleftrightarrow$ (tada ir tik tada) kai lygiai m jo koordinačių yra teigiamos.

Spręskime tiesinio programavimo uždavinio pavyzdį (pratyboms).

~~Minimizuojam~~ Ieškome rasti maksimalią pagamintos produkcijos vertę

$$F(x) = 7x_1 + 5x_2 \longrightarrow \max$$

$$c = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{matrix}$$

Kai turime žaliavos atsargas

$$b = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad Ax \leq b$$

Normalioji uždavinio forma.

Uždavinį perrašome į kanoninę formą (apribojimai yra lygybės)

Įvedame 4 laisvuosius kintamuosius

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \bar{X} \geq 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}\bar{X} = b.$ lygybės tipo apribojimai

$$F(x) = 7x_1 + 5x_2 \longrightarrow \min$$

Tikslo funkcija ~~nekitus~~ nesikeičia

Turime $n = 6$ dimensijos vektorių $\bar{x} \in R^6$.

$m = 4$ - pateiktos 4 ribojimų sąlygos

Kraštinius taškus galime surasti perrinkdami visus galimus nulinių koordinačių variantus. Jų yra ne daugiau nei C_6^2, visus patikriname.

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}.$$

Tarp 15 variantų ne visi taškai bus leistini ar turės 4 nenulines koordinates

Išspręskite uždav. šiuo algoritmu!