Paskaita 9

Variacinio skaičiavimo uždavinių pavyzdžiai

Pradžioje susipažinsime su klasikiniais variacinio skaičiavimo uždaviniais, o vėliau jau formuluosime bendrą tokių uždavinių klasę ir nagrinėsime jų sprendimo metodus.

Šviesos sklidimo trajektorija. Tegul šviesa sklinda plokštumoje (x, y) iš taško $A(x_a, y_a)$ į tašką $B(x_b, y_b)$. Iš mokyklinio fizikos kurso žinome, kad **homogeniškoje** medžiagoje šviesa sklinda tiesės trajektorija, tada jos nueitas kelias yra trumpiausias.

Dabar nagrinėkime atvejį, kai šviesa sklinda per dvi medžiagas: pirmoje medžiagoje

$$D_1 = \{(x, y), \quad 0 \leq y \leq Y_1\}$$

šviesos sklidimo greitis yra v_1 (pvz. vandenyje), o antroje medžiagoje

$$D_2 = \{(x, y), \quad Y_1 < y \leq Y_2\}$$

šviesos sklidimo greitis yra v_2 (pvz. ore, tada $v_2 > v_1$).

Tarkime, kad šviesa sklinda iš antrosios terpės į pirmąją, t.y.

$$x_a < x_b, \quad y_a > Y_1 > y_b.$$

Kokia bus šviesos sklidimo trajektorija?

Ferma principas. Šviesa sklinda ta trajektorija, kuria jos judėjimo laikas T yra **minimalus**.

Beje, remiantis kvantinės mechanikos teorija ir panaudojus R. Feynman diagramų metodą tai galime nesunkiai įrodyti.

Kaip parodėme anksčiau, homogeniškoje terpėje šviesa sklinda tiese, taigi reikia rasti tokį tašką dviejų terpių sandūroje $C(X, Y_1)$, kada laikas

$$T(x) = \frac{\sqrt{(y_a - Y_1)^2 + (x_a - x)^2}}{v_2} + \frac{\sqrt{(y_b - Y_1)^2 + (x_b - x)^2}}{v_1} \tag{1}$$

yra minimalus

$$T(X) = \min_{x_a < x < x_b} T(x). \tag{2}$$

Matome, kad gavome klasikinį optimizavimo uždavinį – rasti funkcijos $T(x)$ globaliojo minimumo tašką.

Variacinio skaičiavimo uždaviniai dažniausiai yra bendresni, ieškome tokios funkcijos, kurį minimizuoją **tikslo funkcionalą**. Apibendrinkime mūsų nagrinėjamą uždavinį ir tarkime, kad šviesa sklinda nehomogeniškoje terpėje ir greitis $v = v(x, y)$ yra dviejų kintamųjų funkcija. Nagrinėkime funkcijas $y = y(x) \in S$, kurios apibrėžia galimas šviesos sklidimo trajektorijas, jos tenkina kraštines sąlygas

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b.$$

Tada šviesos sklidimo iš taško A iki taško B laikas apskaičiuojamas taip

$$T(y) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(x, y)}\, dx. \tag{3}$$

Reikia rasti tą trajektoriją $Y(x)$, kuria judant laikas yra minimalus

$$T(Y) = \min_{y \in S} T(y). \tag{4}$$

Išspręskime uždavinį (1)-(2). Tašką X, kuriame šviesos spindulys pereina per dviejų medžiagų sandūrą, randame išsprendę lygtį

$$T'(x) = 0.$$

Parodykite, kad tada galioja Snelijaus dėsnis

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

čia α_2 yra kampas, kurį sudaro krentantis šviesos spindulys su statmeniu į dviejų terpių paviršių, o α_1 yra kampas, kurį sudaro lūžęs šviesos spindulys.

Brachistochronės radimo uždavinys. Plokštumoje yra užduoti du taškai $A(x_a, y_a)$ ir $B(x_b, y_b)$, kai $x_a < x_b$ ir $y_a > y_b$. Šiuos taškus sujungiame kreive $l \in S$:

$$l = \{y = y(x) : \quad y(x_a) = y_a, \ \ y(x_b) = y_b\}. \tag{5}$$

Materialus taškas slenka šia kreive be trinties veikiamas tik sunkio jėgos, pradiniu laiko momentu jo greitis $v = 0$.

Aibėje $l \in S$ tokių kreivių reikia rasti tą l^*, kuria slinkdamas materialus taškas pasieks B per trumpiausią laiką. Tokia kreivė l^* yra vadinama **brachistochrone**.

Sudarysime matematinį materialiojo taško judėjimo modelį. Pirmiausia pasinaudosime energijos tvermės dėsniu, kuris mūsų atveju tvirtina, kad kinetinės ir potencinės energijų suma nekinta laike (yra konstanta). Pradiniu laiko momentu

$$E(0) = mgy_a,$$

čia pažymėjome m slenkančio taško masę, o g laisvojo kritimo pagreitį. Tada gauname tokią lygtį

$$\frac{mv^2}{2} + mgy(t) = mgy_a, \tag{6}$$

arba

$$\frac{mv^2}{2} = mg\big(y_a - y(t)\big).$$

Materialaus taško greitį apskaičiuojame iš kreivės $l = l(y, x)$ lygties

$$v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt}.$$

Tada iš tvermės dėsnio lygties gauname lygybę

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}dx.$$

Ją integruojame nuo x_a iki x_b, randame materialaus taško judėjimo laiką

$$T(y) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}dx. \tag{7}$$

Tada brachistochronė, yra ta glodi kreivė, kuri tenkina kraštines sąlygas (5) ir suteikia minimalią reikšmę funcionalui (7).

Hamiltono Principas. Variacinis skaičiavimas yra svarbi metodika sprendžiant daugelį mechanikos uždavinių. Hamiltonas suformulavo garsųjį principą, leidžiantį sudaryti nagrinėjamų reiškinių matematinius modelius. Svarbu pastebėti, kad gauname ir universalų įrankį, kaip konstruoti tokių uždavinių sprendimo algoritmus, tiek analizinius, tiek ir skaitinius.

Tarkime, kad žinome nagrinėjamos mechanininės sistemos kinetinę energiją $K = K(t, u, u')$ ir potencinę energiją $P = P(t, u, u')$. Tada imkime funkciją $u \in S$, kuri priklauso leistinų funkcijų aibei S (dažniausiai tai tam tikro glodumo funkcijos, tenkinančios papildomas kraštines ar tvermės sąlygas). Apibrėžiame veikimo integralą

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} (K - P)\, dt. \tag{8}$$

Ieškosime tokios funkcijos $u \in S$, kuri suteikia minimalią reikšmę funkcionalui $I(u)$ (veikimo integralui):

$$I(u^*) = \min_{u \in S} \int_{t_1}^{t_2} F(t, u, u')\, dt. \tag{9}$$

Čia pažymėjome $F = K - P$.

Kaip pavyzdį, nagrinėkime trajektoriją materialaus taško, kuris pradiniu laiko momentu išmestas vertikaliai aukštyn geričiu v. Trajektoriją apibrėžia funkcija $y = y(t)$. Iš pradinės sąlygos gauname funkcijos y ir jos išvestinės y' reikšmes pradiniu laiko momentu $t = 0$ (jos įtraukiamos į leistinų funkcijų aibės S apibrėžimą)

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v.$$

Materialaus taško kinetinė ir potencinė energijos yra atitinkamai lygios

$$K = \frac{1}{2} m \left(y'\right)^2, \quad P = mgy.$$

Tada remdamiesi Hamiltono principu sudarome veikimo integralą

$$I(y) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \left(y'\right)^2 - mgy \right) dt. \tag{10}$$

Iš matematinės analizės kurso gerai žinome būtinąją sąlygą, kad funcija $f = f(x)$ taške x įgytų ekstremumo reikšmę, taip pat papildomą sąlygą, kad šis ekstremumas būtų minimumas. Mūsų tikslas surasti, kokios yra funkcionalo ekstremumo sąlygos.