9 Dinaminiai ekonominiai modeliai

Tyrinėdami ekonomines sistemas ieškojome pusiausvyros taško, vertinome egzogeninių kintamųjų įtaką modeliui ir pan. Tačiau ekonominiai procesai nėra statiniai, t. y. perėjimas nuo vieno pusiausvyros taško prie kito jau yra dinaminis proceas. Dinaminius procesus nagrinėsime taikydami skirtumines lygtis ir diferencialines lygtis. Dinaminiai modeliai įdomūs tuo, kad vieno laikotarpio kintamieji daro įtaką kito laikotarpio kintamiesiems, t. y. kintamieji veikia vieni kitus. Nagrinėdami skirtumines lygtis mes laiką suprantame kaip diskretųjį laiką, t. y. informaciją apie procesą turime ir gauname tik tam tikrais laiko momentais. Tuo tarpu diferencialinės lygtys leidžia procesus nagrinėti realiuoju laiku, t. y. laikas čia yra tolydusis.

9.1 Tiesinės pirmosios eilės skirtuminės lygtys

Tarkime, kad laikas kinta tam tikrame laiko intervale $[0, T]$, o mus dominančio kintamojo reikšmes turime tik diskrečiaisiais laiko momentais $t = 0, 1, 2, ..., T$.

9.1 Apibrėžimas. Tiesine pirmosios eilės skirtumine lygtimi vadinama lygtis

$$x_t = ax_{t-1} + b,$$

čia a, b – egzogeniniai kintamieji.

9.2 Apibrėžimas. Sakome, kad procesas konverguoja, jei esant tam tikroms egzogeninių kintamųjų reikšmėms nuo tam tikro momento x_t praktiškai nekinta, t. y.

$$\lim_{t \to \infty} x_t = x^*.$$

Jei procesas konverguoja, tai procesą aprašanti skirtuminė lygtis vadinama stabilia, o reikšmė x^* – ramybės arba pusiausvyros tašku.

Priešingu atveju procesas diverguoja ir skirtuminė lygtis vadinama nestabilia ir nėra ramybės taško.

Pirmosios eilės skirtuminės lygties ramybės taškas yra

$$x^* = \frac{b}{1-a}.$$

Kai $a = 1$, o $b \neq 0$, tai procesas diverguoja.

Sudarysime pirmosios eilės skirtuminės lygties sprendinį. Pirmiausia sprendžiame homogeninę lygtį:

$$x_t - ax_{t-1} = 0.$$

Šios lygties sprendinio ieškome tarp funkcijų, turinčių pavidalą

$$x_t = CA^t.$$

Sprendinio išraišką įrašę į homogeninę lygtį, gauname

$$CA^t\left(1 - a\frac{1}{A}\right) = 0$$

ir surandame, kad $A = a$. Akivaizdu, kad $C \neq 0$, nes kitaip gautume tik trivialųjį sprendinį.

Bendrąjį pirmosios eilės skirtuminės lygties sprendinį sudarome prie homogeninės lygties sprendinio pridėję pusiausvyros reikšmę, t. y.

$$x_t = Ca^t + \frac{b}{1-a}.$$

Neapibėžtoji konstanta C nustatoma iš pradinės sąlygos, t. y. iš informacijos apie procesą pradiniu laiko momentu. Tarę, kad $x_0 = x0$, gauname

$$x0 = Ca^0 + \frac{b}{1-a},$$

o iš čia

$$C = x0 - \frac{b}{1-a}.$$

Dabar jau galime užrašyti pirmosios eilės skirtuminės lygties sprendinį, tenkinantį duotąją pradinę sąlygą:

$$x_t = \left(x0 - \frac{b}{1-a}\right) a^t + \frac{b}{1-a}.$$

Kaip žinome iš skaičių sekų teorijos, toks procesas konverguoja, kai $|a| < 1$. Skirtuminės lygties fazinės diagramos buvo sudarytos teorinės paskaitos metu.

9.2 Tiesinės antrosios eilės skirtuminės lygtys

9.3 Apibrėžimas. Tiesine antrosios eilės skirtumine lygtimi vadinama lygtis

$$x_t = ax_{t-1} + bx_{t-2} + c,$$

čia a, b ir c – egzogeniniai kintamieji.

9.4 Apibrėžimas. Sakome, kad procesas konverguoja, jei esant tam tikroms egzogeninių kintamųjų reikšmėms nuo tam tikro momento t kintamojo x_t reikšmės nekinta, t. y.

$$\lim_{t\to\infty} x_t = x^*.$$

Antrosios eilės skirtuminės lygties ramybės taškas yra

$$x^* = \frac{c}{1-(a+b)}.$$

Kai $a + b = 1$, o $b \neq 0$, tai procesas diverguoja.

Norėdami sudaryti antrosios eilės skirtuminės lygties sprendinį pirmiausia sprendžiame homogeninę lygtį:

$$x_t - ax_{t-1} - bx_{t-2} = 0.$$

Šios lygties sprendinio, analogiškai kaip ir pirmosios eilės skirtuminės lygties atveju, ieškome tarp funkcijų, turinčių pavidalą

$$x_t = CA^t.$$

Sprendinio išraišką įrašę į homogeninę lygtį, gauname

$$CA^{t-2}\left(A^2 - aA - b\right) = 0.$$

$C \neq 0$, nes kitaip gautume tik trivialųjį sprendinį. A reikšmes surandame spręsdami kvadratinę lygtį:

$$A^2 - aA - b = 0.$$

Šios lygties šaknų reikšmės priklauso nuo diskriminanto:

- Kai $D > 0$, tai turime, kad

  $$A_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b},$$

  o bendrasis antrosios eilės homogeninės skirtuminės lygties sprendinys yra

  $$x_t = C_1 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^t + C_2 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^t.$$

  Pridėję pusiausvyros reikšmę gauname antrosios eilės skirtuminės lygties bendrąjį sprendinį:

  $$x_t = C_1 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^t + C_2 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^t + \frac{c}{1-(a+b)}.$$

- Kai $D = 0$, tai

  $$A_{1,2} = \frac{a}{2},$$

  o antrosios eilės skirtuminės lygties bendrasis sprendinys yra

  $$x_t = (C_1 + C_2 t)\left(\frac{a}{2}\right)^t + \frac{c}{1-(a+b)}.$$

- Kai $D < 0$, tai

  $$A_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\left(-\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right)}$$

  ir iš čia

  $$A_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right)} i, \text{nes} \quad \frac{a^2}{4} < |b|.$$

  Kompleksines šaknis užrašę trigonometrine forma turime

  $$A_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2} \left(\cos\frac{a}{2\sqrt{-b}} \pm i \sin\frac{a}{2\sqrt{-b}}\right).$$

  Antrosios eilės skirtuminės lygties bendrasis sprendinys šiuo atveju yra

  $$x_t = C_1(\sqrt{-b})^t \cos\frac{a}{2\sqrt{-b}} + C_2(\sqrt{-b})^t \sin\frac{a}{2\sqrt{-b}} + \frac{c}{1-(a+b)}.$$

Kaip ir pirmosios eilės skirtuminės lygties atveju, norėdami nustatyti neapibrėžtąsias konstantas C_1 ir C_2, turime žinoti informaciją apie procesą pradiniu ir po jo einančiu laiko momentais, t. y. turime turėti žinomas dvi reikšmes x_0 ir x_1. Irašydami į sprendinio išraišką šias dvi reikšmes atitinkamais laiko momentais, gauname dviejų lygčių sistemą,iš kurios išsprendžiame C_1 ir C_2.