Vektorinis laukas apskritime (tėkmės apskritime)

Nagrinėdami vektorinį lauką nustatėme dinamines sistemas, kurios negali osciliuoti, t.y. niekada nesugrįžta į tą patį tašką. Dabar nagrinėsime dinamines sistemas

$$\theta' = f(\theta),$$

kurių vektorinį lauką vaizduosime apskritime, t.y. θ yra apskritimo taškas, o θ' yra greičio vektorius tame taške, kuris nustatomas pagal taisyklę $\theta' = f(\theta)$. Taigi dabar galime turėti ir periodinių sprendinių.

Pradžioje nagrinėsime paprastus osciliatorius, o vėliau pateiksime taikymus.

Pvz.: 1) Apskritime pavaizduosime dinaminės sistemos

$$\theta' = \sin\theta$$ vektorinį lauką.

Koordinatės apskritime įvedamos spindulio trasoje atidedant kampus θ.

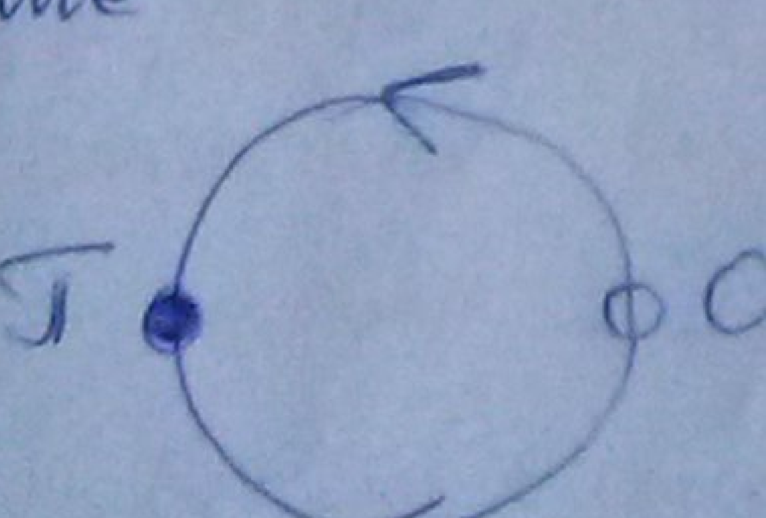
Surandame ramybės taškus, t.y. $\sin\theta = 0$

$$\theta^* = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$\sin\theta > 0$, kai $\theta \in (0, \pi)$, o

$\sin\theta < 0$, kai $\theta \in (\pi, 2\pi)$.

Turime



Vadinasi, taškas $\theta^* = \pi$ yra stabilusis, o $\theta^* = 0$ – nestabilusis.

2) Tačiau, pvz., dinaminės sistemos $\theta' = \theta$ vektorinis laukas negali būti pavaizduotas apskritime, nes du taškai $\theta = 0$ ir $\theta = 2\pi$ yra toje pačioje vietoje. Vienas iš jų ramybės taškas, o kitas – ne (kai $\theta = 2\pi$, tai greitis $\theta' = 2\pi$).

Vektorinis laukas apskritime – tai taisyklė, pagal kurią kiekvienam apskritimo taškui priskiriame vienintelę greičio vekt. reikšmę.

Praktikoje tokią situaciją turime, kai nagrinėjame pirmosios eilės dinamines sistemas $\Theta' = f(\Theta)$, kuriose $f(\Theta)$ yra realiojo argumento periodinė f-ja, kurios periodas 2π. Taip pat laikome, kad $f(\Theta)$ yra tolydi f-ja, kad būtų išlaikintos egzistavimo ir vienaties teoremos sąlygos. Tačiau vektorinis laukas apskritime yra atskiras vektorinio lauko tiesėje atvejis.

Tolygieji osciliatoriai

Taškas ant apskritimo Θ vadinamas kampu arba faze. Kai jis kinta tolygiai, tai turime paprasčiausią osciliatorių

$$\Theta' = \omega \quad , \omega\text{-konstanta}$$

Gauname $\Theta = \omega t + \Theta_0$ – sprendinys, kuris išreiškia tolygų judėjimą apskritimu kampiniu greičiu ω. Šis sprendinys periodinis, kurio periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$. T – osciliavimo periodas.

Šiame osciliatoriuje nėra amplitudės. Jei būtų amplitudė, tai turėtume antrosios eilės sistemą.

Pvz.: Du bėgikai A ir B bėga apskritimu tuo pačiu kryptimi. A bėgikas vieną ratą apbėga per T_1 sekundes, o B per T_2, $T_2 > T_1$. Suprantame, kad bėgikas A periodiškai pavys bėgiką B. Kiek laiko truks nuo starto iki pirmo pavijimo?

Θ_1 – bėgiko A padėtis ant apskritimo, o Θ_2 – B.

$\Theta_1' = \omega_1$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. Analogiškai $\Theta_2' = \omega_2$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$.

A pavys B (pralenkęs jį vienu ratu), kai skirtumas tarp Θ_1 ir Θ_2 bus lygus 2π, t. y.

$$(\omega_1 - \omega_2)t = 2\pi \quad (\Theta_1 = \omega_1 t + \Theta_0, \Theta_2 = \omega_2 t + \Theta_0)$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

Tokia situacija vadinama „mušimu." Du nesąveikaujantys osciliatoriai osciliuoja skirtingais dažniais, bet kartas nuo karto jų fazės sutampa. Pr., kelių bažnyčių varpų skambėjimas ir pan.

Netolygieji osciliatoriai

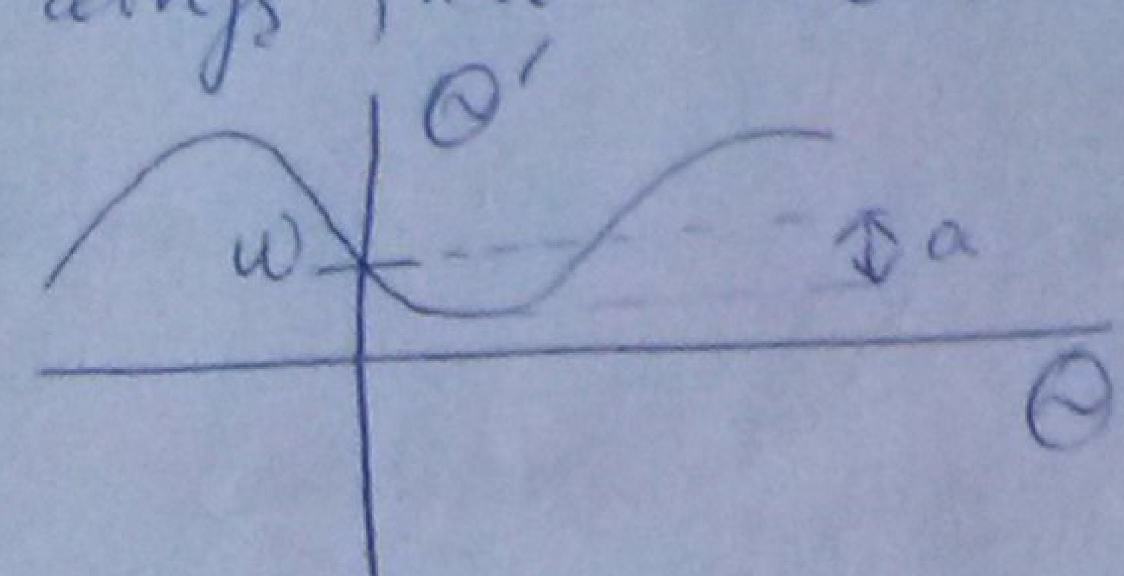
Mokslo ir inžinerijos šakose sutinkame dif. lygtį

$$\Theta' = \omega - a\sin\Theta$$

Pr. biologijoje: žmogaus budrumo ir miego fazės, neuronų osciliacijos,

medžiagų fizikoje: kintamo tankio bangos.

Nagrinėkime atvejį, kai $\omega > 0$ ir $a \geq 0$.



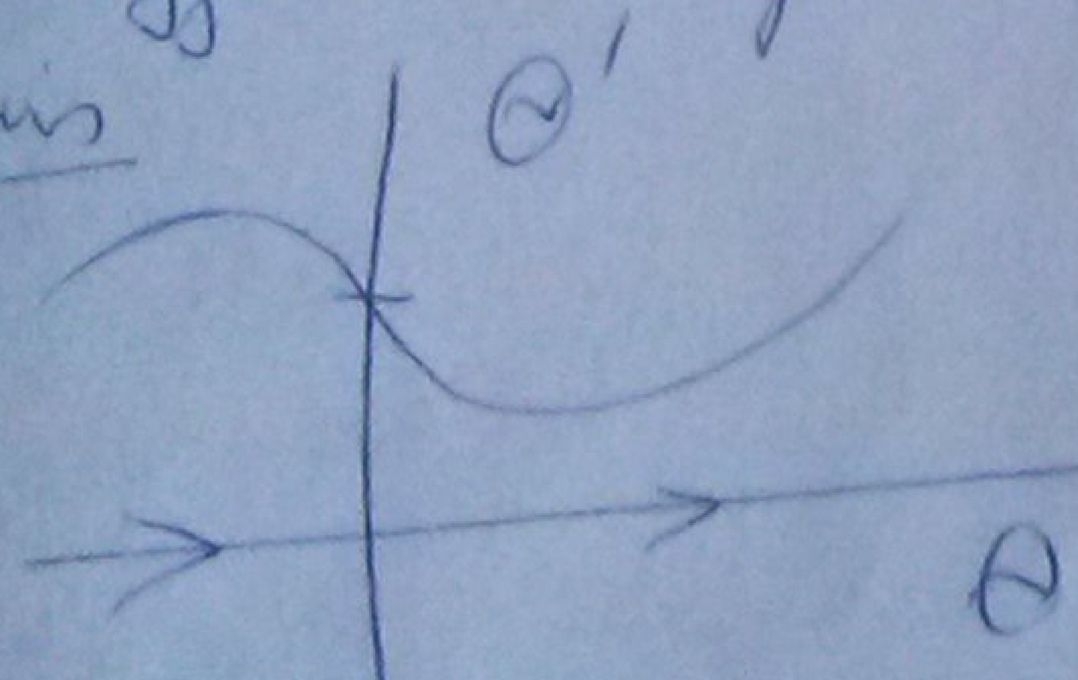
ω – vidurkis,
a – amplitudė

Kai $a = 0$, tai turime tolygųjį osciliatorių. Suprantame netolygumą lemia $a > 0$.

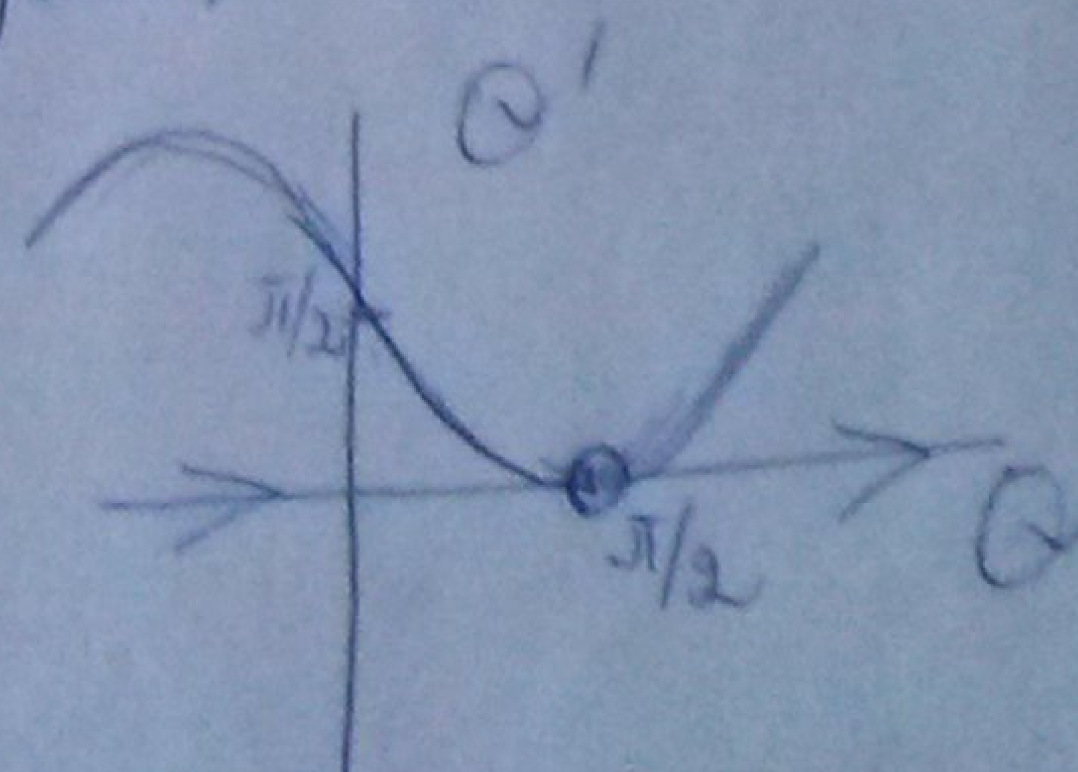
Greičiausia tėkmė yra taške $\Theta = -\frac{\pi}{2}$, o lėčiausia $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

Šis netolygumas tampa itin ryškus, kai didiname a

Vektorinis laukas tiesėje



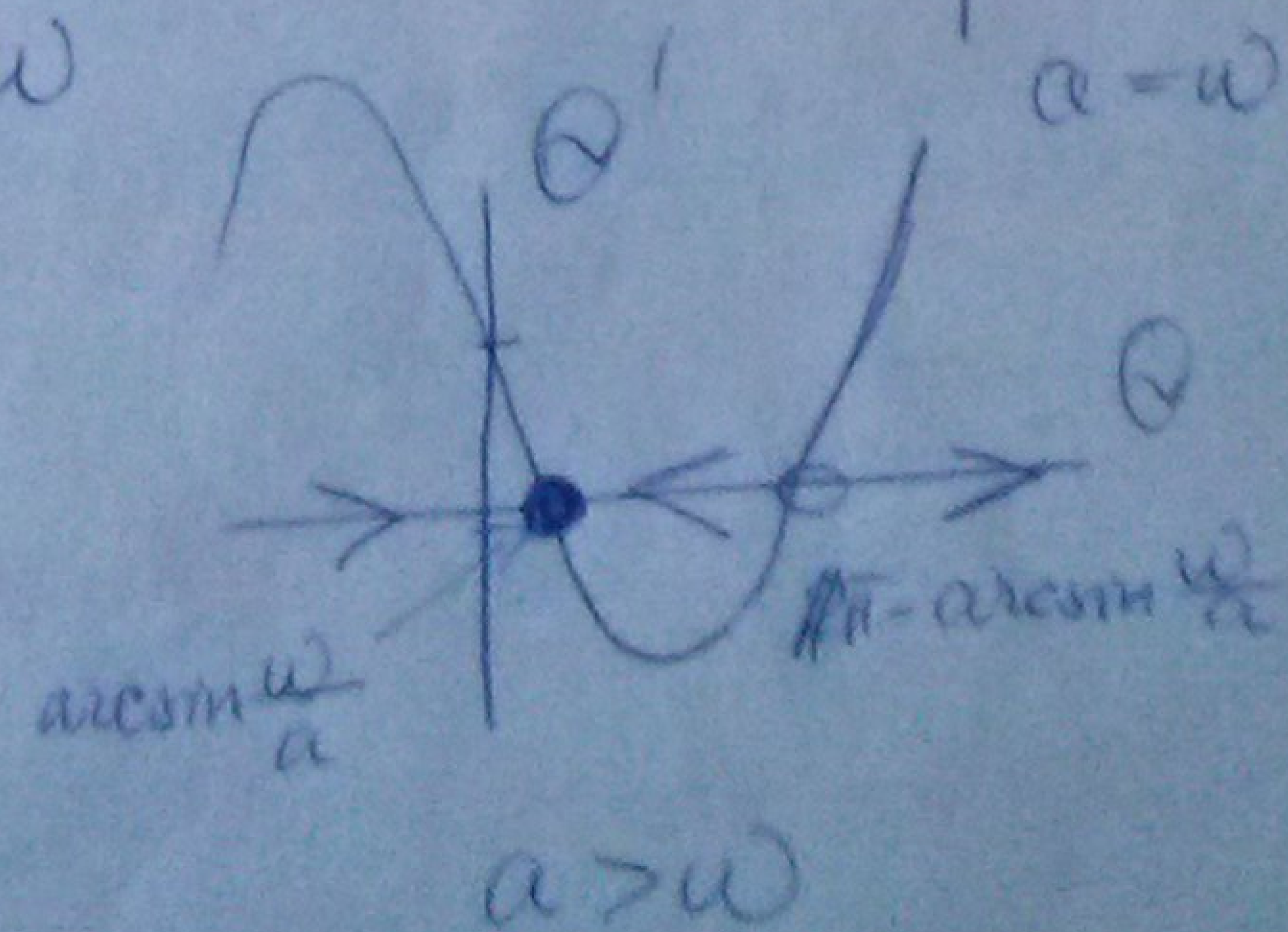
$a < \omega$



$a = \omega$

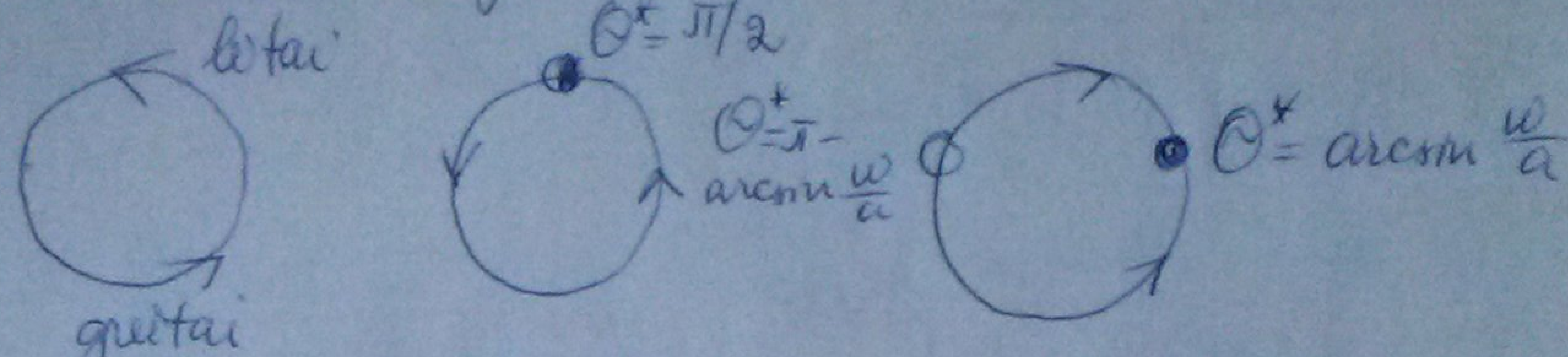
$$\omega - a\sin\Theta = 0$$

$$\Theta^{\pm} = (-1)^k \arcsin\frac{\omega}{a} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$a > \omega$

Vektorinis laukas apskritime:



$a<\omega$ $\quad$ $a=\omega$ $\quad$ $a>\omega$

Tiesinė stabilumo analizė:

$$f(\theta)=\omega - a\sin\theta, \quad f'(\theta) = -a\cos\theta$$

Kai $\theta^* = \arcsin\frac{\omega}{a}$, tai $f'(\theta^*) < 0$ – taškas stabilus.

Kai $\theta^* = \pi - \arcsin\frac{\omega}{a}$, tai $f'(\theta^*) > 0$ – taškas nestabilus.

Osciliavimo periodas

Laikas reikalingas θ pasisukti per 2π yra osciliavimo periodas, kai $a<\omega$:

$$T = \int dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{d\theta}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\text{dif. lygtis}}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta};$$

$u = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$, $\quad u = -\infty$, kai $\theta = -\pi$, $\quad u = +\infty$, kai $\theta = \pi$.

$$1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+u^2}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2u}{1+u^2};$$

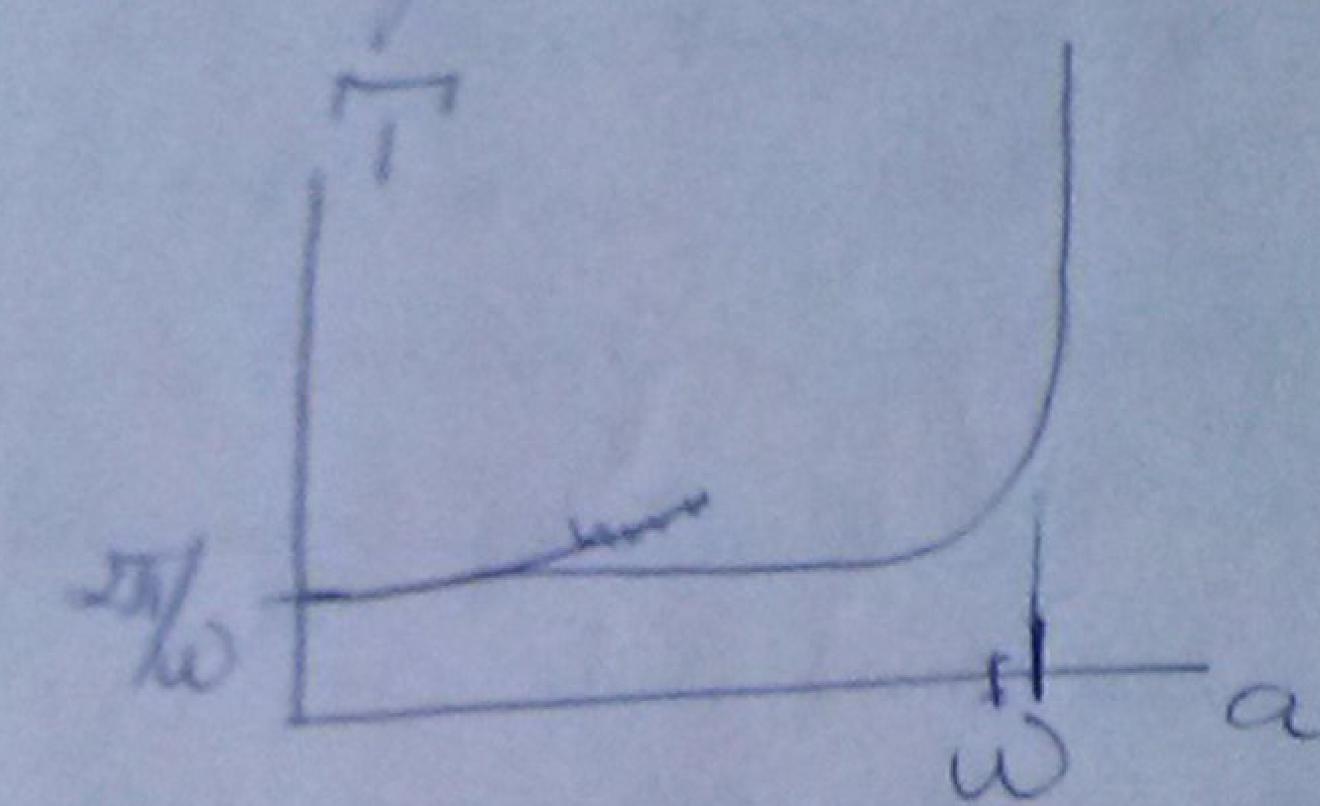
$$du = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\frac{1}{2}\,d\theta \Rightarrow du = \frac{1+u^2}{2}\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,du}{\omega(1+u^2) - 2ua} = \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(u - \frac{a}{\omega}\right)}{\left(u - \frac{a}{\omega}\right)^2 + \underbrace{1 - \left(\frac{a}{\omega}\right)^2}_{>0,\ \text{nes}\ a<\omega}} =$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}} \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg} \frac{u - \frac{a}{\omega}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}} \Bigg|_A^B =$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} .$$

Suprantama, kad T priklauso nuo a. Grafike matome šią priklausomybę



Kai $a=0$, tai $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tai mums žinomas mechaninių svyravimų periodas (tolygusis oscilatorius).

Kai $a \to \omega_-$, tai periodas T didėja ir tampa neapibrėžtas, kai $a=\omega$.

Kaip nyksta šis divergavimas?

Prisiminkime, kad

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}, \text{ o}$$

$$\omega^2 - a^2 = (\omega + a)(\omega - a)$$

Tuomet, kai $a \approx \omega$, tai $\omega + a \approx 2\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2\omega}\sqrt{\omega - a}} = \pi\sqrt{\frac{2}{\omega}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

Tai rodo, kad sprendinys nyksta kaip $(\omega - a)^{-1/2}$, kai $a_{krit.} = \omega$.