9 Netiesinės antrosios eilės dinaminės sistemos

9.1 Faziniai portretai

Jei nagrinėjame autonominę dinaminę sistemą

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{9.1}$$

čia $f_1(x_1, x_2)$ ir $f_1(x_1, x_2)$ yra žinomos netiesinės funkcijos, tai ją galime užrašyti vektorine forma

$$\overrightarrow{X'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}). \tag{9.2}$$

Tuomet $\overrightarrow{X}$ žymi tašką fazinėje plokštumoje, o $\overrightarrow{X'}$ – greičio vektorių tame taške. Tai reiškia, kad taškas $\overrightarrow{X}$ juda fazinėje plokštumoje $\overrightarrow{X'}$ greičiu sudarydamas sprendinį, t. y. trajektoriją $\overrightarrow{X}(t)$.

Kiekvienas fazinės plokštumos taškas gali būti nagrinėjamas kaip atitinkama dinaminės sistemos pradinė sąlyga, tai tokiu būdu suprantame, kad visa fazinė plokštuma yra pilnai užpildyta trajektorijomis. Minėtas trajektorijų lygtis galima gauti sprendžiant dinamines sistemas. Dažnai tokias sistemas tenka spręsti skaitiniais metodais. Spręsti (9.2) galima lygiai taip pat, kaip ir vieną pirmosios eilės diferencialinę lygtį, t.y. galime taikyti, pavyzdžiui, keturių pakopų Rungės-Kutos metodą. Pateiksime šio metodo vektorinę formą (siūlome pabandyti šį metodą pritaikyti netiesinių dinaminių sistemų trajektorijoms gauti)

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{K_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X_i}), \\ &\overrightarrow{K_l} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X_i} + \tau \sum_{i=1}^{l-1} b_{li}\overrightarrow{K_i}),\ l = 2, 3, ..., m, \\ &\overrightarrow{X_{i+1}} = \overrightarrow{X_i} + \tau \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \overrightarrow{K_i}. \end{aligned}$$

Čia $\tau = \frac{T}{n}$, $t_i = t_0 + \tau\ i$, $\overrightarrow{X_i} = \overrightarrow{X}(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, o $b_{21} = 1/2$, $b_{31} = 0$, $b_{32} = 1/2$, $b_{41} = 0$, $b_{42} = 0$, $b_{43} = 1$, $\sigma_1 = 1/6$, $\sigma_2 = 1/3$, $\sigma_3 = 1/3$, $\sigma_4 = 1/6$.

Tačiau trajektorijų lygtys mūsų studijų dalyko kontekste nėra įdomios. Mus domina tik kokybinė sprendinių elgsena. Todėl nagrinėdami fazinius portretus mes siekiame:

- nustatyti dinaminės sistemos ramybės taškus, kuriuose $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{O}$,
- periodinių sprendinių atveju nagrinėti atsirandančias uždaras orbitas,
- tirti trajektorijų išsidėstymą ramybės taškų ir orbitų aplinkoje,
- išsiaiškinti ramybės taškų ir orbitų stabilumo klausimus.

9.2 Sprendinių egzistavimas ir vienatis

Anksčiau tyrinėjome dinamines sistemas nesidomėdami, ar dinaminė sistema iš viso turi sprendinių. Dabar suformuluosime iš *Diferencialinių lygčių ir jų taikymo* kurso žinomos Koši teoremos analogą.

9.1 Teorema. *Jei dinaminės sistemos* (9.2) *dešinės pusės funkcija* $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{X})$ *ir jos dalinės išvestinės visų kintamųjų atžvilgiu* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,\ j = 1, 2, ..., n$ *yra tolydžiosios funkcijos atviroje jungiojoje erdvės* $\mathbb{R}^n$ *srityje* $D \subset \mathbb{R}^n$, *tai šioje srityje dinaminė sistema* (9.2) *turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą* $\overrightarrow{X}(0) = \overrightarrow{X_0}$.

Kitais žodžiais sakant, ši teorema tvirtina, kad dvi skirtingos dinaminės sistemos trajektorijos niekada nesusikerta. Šioje vietoje galime paminėti įdomų dalyką, susijusį su uždaromis orbitomis fazinėje plokštumoje. Jei kuri nors dinaminės sistemos trajektorija prasideda orbitos viduje, tai remiantis teorema ji ten ir lieka visą laiką. Jei orbitos viduje yra ramybės taškų, tai bėgant laikui ta trajektorija gali pasiekti vieną iš jų. Į klausimą, kas nutiks su trajektorija tuo atveju, jei orbitos viduje nėra ramybės taškų, atsakysime kiek vėliau nagrinėdami Puankare-Bendikso teoremą.

9.3 Netiesinės antrosios eilės dinaminės sistemos ramybės taškai

Nagrinėkime dinaminę sistemą, turinčią tokį pavidalą:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Tarkime, kad (x^*, y^*) yra šios sistemos ramybės taškas, t.y. $f(x^*, y^*) = 0$ ir $g(x^*, y^*) = 0$. Nagrinėkime taškus, esančius ramybės taško aplinkoje, t. y. mažus ramybės taško sužadinimus: $u = x - x^*$, $v = y - y^*$. Tuomet turime tokią dinaminę sistemą:

$$\begin{cases} u' = f(u + x^*, v + y^*), \\ v' = g(u + x^*, v + y^*), \end{cases}$$

kurios dešinės pusės funkcijas išskleidžiame Teiloro eilute ramybės taško aplinkoje iki pirmosios eilės narių imtinai. Gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} u' = f(x^*, y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x^*,y^*)} + R_1(u, v), \\ v' = g(x^*, y^*) + u\frac{\partial g}{\partial x}\big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial g}{\partial y}\big|_{(x^*,y^*)} + R_2(u, v). \end{cases}$$

Kadangi (x^*, y^*) yra nagrinėjamos sistemos ramybės taškas, tai

$$\begin{cases} u' = u\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x^*,y^*)} + R_1(u, v), \\ v' = u\frac{\partial g}{\partial x}\big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial g}{\partial y}\big|_{(x^*,y^*)} + R_2(u, v). \end{cases}$$

Kaip matome, gavome tiesinę dinaminę sistemą, tinkančią mažiems sužadinimams tirti:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*,y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathcal{O}(u^2.v^2, uv). \tag{9.3}$$

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*,y^*)}$$

vadinama linearizacijos matrica arba Žordano matrica ramybės taškui (x^*, y^*). Sistemoje (9.3) atmetę nykstamai mažus skleidinio narius gauname linearizuotą sistemą

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*,y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

kurią jau mokame tirti.